TEORÍA DE LA MEDIDA

Sesión 18

Convergencia en L^p

Asumimos que se tiene definido un espacio de medida completo $(\mathbb{F}, \mathcal{F}, \mu)$**.**

Recordemos las siguientes definiciones y resultados:

1. Una sucesión de funciones medibles $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge casi en todas partes a una función medible f si $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ excepto a lo más en un conjunto de medida cero. Si éste es el caso, se escribirá $f_n \xrightarrow{c.t.p.} f$.

2. Una sucesión de funciones medibles $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en medida si existe una función medible f tal que, para cualquier $\varepsilon > 0$, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\{y \in \mathbb{E} : |f_n(y) - f(y)| > \varepsilon\}\right) = 0$$

Si éste es el caso, se escribirá $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

3. Supongamos que μ es finita y sean f una función medible, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles tal que $f_n \xrightarrow{\mu} f$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces $g \circ f_n \xrightarrow{\mu} g \circ f$.

4. Supongamos que μ es finita y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles tal que $f_n \xrightarrow{c.t.p.} f$, entonces $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

5. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles que converge en medida, entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contiene una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge casi en todas partes a una función medible f y tal que, dada $\delta > 0$, existe un conjunto medible A tal que $\mu(A) < \delta$ y la sucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f sobre A^c.

Teorema 1. *Sea* $p \in (0, \infty]$ *y* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *una sucesión de funciones medibles tal que* $f_n \xrightarrow{L^p} f$*, entonces* $f_n \xrightarrow{\mu} f$*.*

Demostración

Sea $p \in (0, \infty)$.

Para cualquier $\varepsilon > 0$, se tiene:

$\int_{\mathbb{F}} |f_n - f|^p \, d\mu = \int_{\{|f_n - f| > \varepsilon\}} |f_n - f|^p \, d\mu + \int_{\{|f_n - f| \leq \varepsilon\}} |f_n - f|^p \, d\mu$

$\geq \int_{\{|f_n - f| > \varepsilon\}} |f_n - f|^p \, d\mu \geq \varepsilon^p \mu \left[|f_n - f| > \varepsilon \right]$

Así que:

$$\mu \left[|f_n - f| > \varepsilon \right] \leq \tfrac{1}{\varepsilon^p} \int_{\mathbb{F}} |f_n - f|^p \, d\mu$$

Por lo tanto, $\lim_{n \to \infty} \mu \left[|f_n - f| > \varepsilon \right] = 0$ para cualquier $\varepsilon > 0$.

Supongamos que $f_n \xrightarrow{L^\infty} f$, entonces $\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ y, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $|f_n - f| \leq \|f_n - f\|_\infty$ casi en todas partes.

Dada $\varepsilon > 0$, sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$ para cualquier $n \geq N$. Entonces, para cualquier $n \geq N$, $|f_n - f| \leq \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$ casi en todas partes. Así que $\mu \left[|f_n - f| > \varepsilon \right] = 0$ para cualquier $n \geq N$. Por lo tanto, $\lim_{n \to \infty} \mu \left[|f_n - f| > \varepsilon \right] = 0$ para cualquier $\varepsilon > 0$.

∎

Como se muestra en los siguientes dos ejemplos, en general, para $p \in (0, \infty)$, la convergencia en L^p no implica convergencia casi en todas partes, ni esta última implica convergencia en L^p.

Ejemplo 1. *Sea* $\mathbb{F} = (0, 1]$*,* μ *la medida de Lebesgue sobre* $\mathbb{F}$ *y* $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *la sucesión de intervalos:*

$J_1 = (0, 1]$

$J_2 = (0, \frac{1}{2}]$, $J_3 = (\frac{1}{2}, 1]$

$J_4 = (0, \frac{1}{2^2}]$, $J_5 = (\frac{1}{2^2}, \frac{2}{2^2}]$, $J_6 = (\frac{2}{2^2}, \frac{3}{2^2}]$, $J_7 = (\frac{3}{2^2}, \frac{4}{2^2}]$

$\ldots$

Es decir, para $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ *y* $j \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$*,* $J_{2^n + j} = (\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}]$*.*

Para cada $n \in \mathbb{N}$*, definamos* $f_n = I_{J_n}$*.*

Para cualquier $p \in (0, \infty)$, $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ *y* $j \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$, *se tiene:*

$$\int_{\mathbb{F}} |f_{2^n+j}|^p \, d\mu = \int_{\mathbb{F}} \left| I_{\left(\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right]} \right|^p d\mu = \tfrac{1}{2^n}$$

Así que, $f_n \xrightarrow{L^p} 0$, pero, para cualquier $x \in \mathbb{F}$, la sucesión $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ no converge.

Ejemplo 2. *Sea* $\mathbb{F} = (0, 1]$, μ *la medida de Lebesgue sobre* $\mathbb{F}$ *y* $p \in (0, \infty)$. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, *definamos* $f_n : \mathbb{F} \to \mathbb{R}$ *de la siguiente manera:*

$$f_n(x) = \begin{cases} (2^n)^{\frac{1}{p}} & \text{si } x \in \left(0, \frac{1}{2^n}\right) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para cualquier $x \in \mathbb{F}$ se tiene $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

Por otra parte, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$\int_{\mathbb{F}} |f_{n+1} - f_n|^p \, d\mu \geq \int_{\left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right]} |f_{n+1} - f_n|^p \, d\mu = \int_{\left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right]} |f_n|^p \, d\mu = 2^n \left(\tfrac{1}{2^n} - \tfrac{1}{2^{n+1}}\right) = \tfrac{1}{2}$$

Así que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es de Cauchy en L^p y, por lo tanto, no converge en L^p.

Si $p = \infty$ tomemos:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left(0, \frac{1}{2^n}\right) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para cualquier $x \in \mathbb{F}$ se tiene $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

Por otra parte, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$||f_{n+1} - f_n||_\infty = 1$$

Así que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es de Cauchy en L^∞ y, por lo tanto, no converge en L^∞.

Teorema 2. *Sean* $p \in (0, \infty)$, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en* L^p *y* f *una función medible. Si* μ *es una medida finita, las siguientes propiedades son equivalentes:*

i) $f_n \xrightarrow{\mu} f$ y la familia $\{|f_n|^p : n \in \mathbb{N}\}$ es uniformemente integrable.

ii) $f \in L^p$ y $f_n \xrightarrow{L^p} f$.

iii) $f \in L^p$, $f_n \xrightarrow{\mu} f$ y $\text{lím}_{n\to\infty} \int_{\mathbb{F}} |f_n|^p \, d\mu = \int_{\mathbb{F}} |f|^p \, d\mu$.

Demostración

$i \Rightarrow ii$

Como $f_n \xrightarrow{\mu} f$, existe una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $f_{n_k} \xrightarrow{c.t.p.} f$ y, como la familia $\{|f_{n_k}|^p : k \in \mathbb{N}\}$ es uniformemente integrable, $|f|^p$ es integrable.

Por otra parte:

$$|f_n - f|^p \leq 2^p \left(|f_n|^p + |f|^p\right)$$

Así que la familia $\{|f_n - f|^p\}_{n\in\mathbb{N}}$ también es uniformemente integrable. Por lo tanto, dada cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\int_A |f_n - f|^p \, d\mu < \varepsilon$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y cualquier $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(A) \leq \delta$.

Pero:

$$\text{lím}_{n\to\infty} \mu\left[|f_n - f|^p > \alpha\right] = \text{lím}_{n\to\infty} \mu\left[|f_n - f| > \alpha^{\frac{1}{p}}\right] = 0$$

Así que, dada $\delta > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mu\left[|f_n - f|^p > \alpha\right] < \delta$ para cualquier $n \geq N$.

Por lo tanto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\int_{\{|f_n - f|^p > \alpha\}} |f_n - f|^p \, d\mu < \varepsilon$ para cualquier $n \geq N$.

Así que:

$$\text{lím}_{n\to\infty} \int_{\{|f_n - f|^p > \alpha\}} |f_n - f|^p \, d\mu = 0$$

Además, para cada $\alpha > 0$, se tiene:

$\int_{\mathbb{F}} |f_n - f|^p \, d\mu = \int_{\{|f_n - f|^p > \alpha\}} |f_n - f|^p \, d\mu + \int_{\{|f_n - f|^p \leq \alpha\}} |f_n - f|^p \, d\mu$

$\leq \int_{\{|f_n - f|^p > \alpha\}} |f_n - f|^p \, d\mu + \alpha\mu(\mathbb{F})$

Así que:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{F}}|f_n-f|^p\,d\mu\leq\lim_{n\to\infty}\int_{\{|f_n-f|^p>\alpha\}}|f_n-f|^p\,d\mu+\alpha\mu\left(\mathbb{F}\right)=\alpha\mu\left(\mathbb{F}\right)$$

Finalmente, como $\alpha>0$ es arbitraria, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{F}}|f_n-f|^p\,d\mu=0$$

Por lo tanto, $f_n\xrightarrow{L^p}f$.

$ii\Rightarrow iii$

Para todo espacio vectorial normado $(\mathbb{X},||\bullet||)$, se tiene:

$$|||x||-||y|||\leq||x-y||$$

Así que, si una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x, entonces:

$$|||x_n||-||x|||\leq||x_n-x||$$

Por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty}\left(|||x_n||-||x|||\right)\leq\lim_{n\to\infty}||x_n-x||=0$$

Se concluye entonces que:

$$\lim_{n\to\infty}||x_n||=||x||$$

Si $f\in L^p$ y $f_n\xrightarrow{L^p}f$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{\mathbb{F}}|f_n|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\int_{\mathbb{F}}|f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\text{ si }p\in[1,\infty)$$
$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{F}}|f_n|^p\,d\mu=\int_{\mathbb{F}}|f|^p\,d\mu\text{ si }p\in(0,1)$$

Así que, en cualquier caso:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{F}}|f_n|^p\,d\mu=\int_{\mathbb{F}}|f|^p\,d\mu$$

$iii \Rightarrow i$

Para $\beta > 0$ y $x \in \mathbb{R}$, definamos:

$$f_\beta(x) = \begin{cases} |x|^p & \text{si } |x| \leq \beta^{\frac{1}{p}} \\ -\frac{\beta}{(2\beta)^{\frac{1}{p}} - \beta^{\frac{1}{p}}}\left(x - (2\beta)^{\frac{1}{p}}\right) & \text{si } x > 0 \text{ y } \beta^{\frac{1}{p}} < |x| < (2\beta)^{\frac{1}{p}} \\ \frac{\beta}{(2\beta)^{\frac{1}{p}} - \beta^{\frac{1}{p}}}\left(x + (2\beta)^{\frac{1}{p}}\right) & \text{si } x < 0 \text{ y } \beta^{\frac{1}{p}} < |x| < (2\beta)^{\frac{1}{p}} \\ 0 & \text{si } |x| \geq (2\beta)^{\frac{1}{p}} \end{cases}$$

f_β es una función continua, así que $f_\beta \circ f_n \xrightarrow{\mu} f_\beta \circ f$.

Además, $f_\beta(x) \leq |x|^p$ y $0 \leq f_\beta(x) \leq \beta$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

Se tiene $|f_\beta \circ f_n| \leq \beta$ y $f_\beta \circ f_n \xrightarrow{\mu} f_\beta \circ f$, así que:

$$\text{lím}_{n\to\infty} \int_{\mathbb{F}} |f_\beta \circ f_n - f_\beta \circ f| \, d\mu = 0$$

Por lo tanto:

$$\text{lím}_{n\to\infty} \int_{\mathbb{F}} f_\beta \circ f_n d\mu = \int_{\mathbb{F}} f_\beta \circ f d\mu$$

Se tiene:

$$\text{lím inf}_{n\to\infty} \int_{\{y\in\mathbb{F}:|f_n(y)|^p \leq 2\beta\}} |f_n|^p \, d\mu \geq \int_{\{y\in\mathbb{F}:|f_n(y)|^p \leq 2\beta\}} f_\beta \circ f_n d\mu = \int_{\mathbb{F}} f_\beta \circ f_n d\mu$$

Así que:

$\text{lím inf} \int_{\{y\in\mathbb{F}:|f_n(y)|^p \leq 2\beta\}} |f_n|^p \, d\mu \geq \text{lím}_{n\to\infty} \int_{\mathbb{F}} f_\beta \circ f_n d\mu = \int_{\mathbb{F}} f_\beta \circ f d\mu$

$\geq \int_{\{y\in\mathbb{F}:|f(y)|^p \leq \beta\}} f_\beta \circ f d\mu = \int_{\{y\in\mathbb{F}:|f(y)|^p \leq \beta\}} |f|^p \, d\mu.$

Además, por hipótesis:

$$\text{lím}_{n\to\infty} \int_{\mathbb{F}} |f_n|^p \, d\mu = \int_{\mathbb{F}} |f|^p \, d\mu$$

Por lo tanto:

$\text{lím sup} \int_{\{y\in\mathbb{F}:|f_n(y)|^p > 2\beta\}} |f_n|^p \, d\mu = \text{lím sup} \left(\int_{\mathbb{F}} |f_n|^p \, d\mu - \int_{\{y\in\mathbb{F}:|f_n(y)|^p \leq 2\beta\}} |f_n|^p \, d\mu \right)$

$= \text{lím}_{n\to\infty} \int_{\mathbb{F}} |f_n|^p \, d\mu - \text{lím inf} \int_{\{y\in\mathbb{F}:|f_n(y)|^p \leq 2\beta\}} |f_n|^p \, d\mu$

$\leq \int_{\mathbb{F}} |f|^p \, d\mu - \int_{\{y\in\mathbb{F}:|f(y)|^p \leq \beta\}} |f|^p \, d\mu = \int_{\{y\in\mathbb{F}:|f(y)|^p > \beta\}} |f|^p \, d\mu$

Dada $\varepsilon > 0$, tomemos β_0 tal que $\int_{\{y\in\mathbb{F}:|f(y)|^p>\beta_0\}} |f|^p \, d\mu < \varepsilon$. Entonces:

$\lim_{n\to\infty} \left(\sup \left\{ \int_{\{y\in\mathbb{F}:|f_j(y)|^p>2\beta_0\}} |f_j|^p \, d\mu : j \geq n \right\} \right)$

$= \limsup \int_{\{y\in\mathbb{F}:|f_n(y)|^p>2\beta_0\}} |f_n|^p \, d\mu \leq \int_{\{y\in\mathbb{F}:|f(y)|^p>\beta_0\}} |f|^p \, d\mu < \varepsilon$

Así que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\sup \left\{ \int_{\{y\in\mathbb{F}:|f_j(y)|^p>2\beta_0\}} |f_j|^p \, d\mu : j \geq n \right\} < \varepsilon$$

para cualquier $n \geq N$.

Para cada $j \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$ tomemos β_j tal que:

$$\int_{\left\{y\in\mathbb{F}:|f_j(y)|^p>2\beta_j\right\}} |f_j|^p \, d\mu < \varepsilon$$

Definiendo $\alpha = \max\left\{2\beta_0, 2\beta_1, \ldots, 2\beta_{N-1}\right\}$, se tiene:

$$\sup \left\{ \int_{\{y\in\mathbb{F}:|f_j(y)|^p>\alpha\}} |f_j|^p \, d\mu : j \in \mathbb{N} \right\} < \varepsilon$$

Por lo tanto:

$$\lim_{\alpha\to\infty} \sup \left\{ \int_{\{y\in\mathbb{F}:|f_j(y)|^p>\alpha\}} |f_j|^p \, d\mu : j \in \mathbb{N} \right\} = 0$$

Así que la familia $\{|f_n|^p : n \in \mathbb{N}\}$ es uniformemente integrable.

■

Proposición 1. *Supongamos que la medida μ es finita, entonces, para cualquier $r \in (0, \infty]$, si $f_n \xrightarrow{L^r} f$, entonces $f_n \xrightarrow{L^p} f$ para cualquier $p \in (0, r]$.*

Demostración

Si $f_n \xrightarrow{L^\infty} f$, entonces $\lim_{n\to\infty} \sup es \{|f_n - f|\} = 0$. Así que, dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que $\sup es \{|f_n - f|\} < \varepsilon$ para cualquier $n \geq N$. Por consiguiente, $|f_n - f| < \varepsilon$ casi en todas partes. Así que $\int_{\mathbb{F}} |f_n - f|^p \, d\mu \leq \varepsilon^p \mu(\mathbb{F})$ para cualquier $n \geq N$ y $p \in (0, \infty)$. Por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{F}} |f_n - f|^p \, d\mu = 0$$

Si $r \in (0, \infty)$ y $f_n \xrightarrow{L^r} f$, entonces $f_n \xrightarrow{\mu} f$ y la familia $\{|f_n|^r\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente integrable.

Además, $|y|^p \leq 1 + |y|^r$ para cualquier $y \in \mathbb{R}$ y cualquier $p \in (0, r]$. Por lo tanto, para $\alpha > 2$, se tiene:

$$\int_{\{|f_n|^p > \alpha\}} |f_n|^p \, d\mu \leq \int_{\{1+|f_n|^r > \alpha\}} (1 + |f_n|^r) \, d\mu \leq 2 \int_{\{|f_n|^r > \alpha - 1\}} |f_n|^r \, d\mu$$

Así que:

$$\text{lím}_{\alpha\to\infty} \sup \left\{ \int_{\{|f_n|^p > \alpha\}} |f_n|^p \, d\mu : n \in \mathbb{N} \right\} \leq 2 \, \text{lím}_{\alpha\to\infty} \sup \left\{ \int_{\{|f_n|^r > \alpha - 1\}} |f_n|^r \, d\mu : n \in \mathbb{N} \right\} = 0$$

Por lo tanto, la familia $\{|f_n|^p\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente integrable.

Finalmente, como también se tiene $f_n \xrightarrow{\mu} f$, entonces $f \in L^p$ y $f_n \xrightarrow{L^p} f$.

■

Consideremos ahora un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$.

Recordemos que una función $\varphi : I \to \mathbb{R}$, definida en un intervalo cualquiera, es convexa si, para cualquier par de puntos $x, y \in I$, con $x \neq y$, y cualquier punto z en el intervalo cerrado J, cuyos extremos son x y y, se tiene $\varphi(z) \leq \ell(x)$, donde ℓ es la función, definida sobre J, cuya gráfica es el segmento de recta que une los puntos $(x, \varphi(x))$ y $(y, \varphi(y))$; es decir:

$$\varphi(z) \leq \varphi(x) + \tfrac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x}(z - x)$$

De manera equivalente, Una función $\varphi : I \to \mathbb{R}$ es convexa si, para cualquier par de puntos $x, y \in I$ y cualquier $\lambda \in [0, 1]$, se tiene:

$$\varphi(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leq \lambda\varphi(x) + (1 - \lambda)\varphi(y)$$

Proposición 2 (Desigualdad de Jensen). *Sea $\mathcal{G}$ una subσ-álgebra de $\Im$, X una variable aleatoria de esperanza finita y $\varphi : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función convexa tal que $\varphi(X)$ tiene esperanza finita, entonces $\varphi(E[X \mid \mathcal{G}]) \leq E[\varphi(X) \mid \mathcal{G}]$.*

Demostración

Como φ es convexa, para cualquier pareja de números reales x, y, se tiene $\varphi(x) - \varphi(y) \geq \varphi'(y)(x - y)$, donde φ' es la derivada por la derecha de φ. De manera que si definimos $Z = E[X \mid \mathcal{G}]$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $W_n = I_{[-n,n]}(Z)$, se tiene $W_n\varphi(X) - W_n\varphi(Z) \geq W_n\varphi'(Z)(X - Z)$. Pero, como W_n y $W_n\varphi'(Z)$ son variables aleatorias acotadas $\mathcal{G}$-medibles, se tiene:

$$W_n E[\varphi(X) \mid \mathcal{G}] - W_n\varphi(Z) = E[W_n\varphi(X) \mid \mathcal{G}] - E[W_n\varphi(Z) \mid \mathcal{G}]$$

$$\geq E[W_n\varphi'(Z)(X - Z) \mid \mathcal{G}] = W_n\varphi'(Z)E[(X - Z) \mid \mathcal{G}] = 0$$

Así que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$:

$$W_n \varphi(Z) \leq W_n E\left[\varphi(X) \mid \mathcal{G}\right]$$

de lo cual se obtiene, tomando límites cuando $n \to \infty$:

$$\varphi(Z) \leq E\left[\varphi(X) \mid \mathcal{G}\right]$$

■

Proposición 3. *Sea* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de variables aleatorias la cual converge a* X *en* L^p*, con* $p \in [1, \infty)$*, y* $\mathcal{G}$ *una sub*σ*-álgebra de* $\mathcal{F}$*. Entonces la sucesión* $\left(E\left[X_n \mid \mathcal{G}\right]\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* $E\left[X \mid \mathcal{G}\right]$ *en* L^p *.*

Demostración

Por la desigualdad de Jensen, se tiene:

$$\left|E\left[X_n \mid \mathcal{G}\right] - E\left[X \mid \mathcal{G}\right]\right|^p = \left|E\left[X_n - X \mid \mathcal{G}\right]\right|^p \leq E\left[\left|X_n - X\right|^p \mid \mathcal{G}\right]$$

Así que:

$$E\left(\left|E\left[X_n \mid \mathcal{G}\right] - E\left[X \mid \mathcal{G}\right]\right|^p\right) \leq E\left(E\left[\left|X_n - X\right|^p \mid \mathcal{G}\right]\right) = E\left[\left|X_n - X\right|^p\right]$$

Por lo tanto:

$$\text{lím}_{n\to\infty} E\left(\left|E\left[X_n \mid \mathcal{G}\right] - E\left[X \mid \mathcal{G}\right]\right|^p\right) = \text{lím}_{n\to\infty} E\left[\left|X_n - X\right|^p\right] = 0$$

■

Densidad de las funciones simples en L^p

Lema 1. *Sea* $p \in (0, \infty)$*. Una función simple no negativa* φ *pertenece a* L^p *si sólo si* φ *es nula fuera de un conjunto de medida finita.*

Demostración

Sea φ una función simple no negativa con representación canónica $\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k I_{E_k}$. Entonces, para $p \in (0, \infty)$, se tiene:

$$\int_{\mathbb{F}} \varphi^p d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k^p \mu\left(E_k\right)$$

Así que $\varphi \in L^p$ si y sólo si $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu\left(E_k\right) < \infty$.

Además:

$$\{x \in \mathbb{F} : \varphi(x) > 0\} = \bigcup_{k=1}^{n} I_{E_k}$$

Por lo tanto, $\varphi \in L^p$ si y sólo si $\mu\left(\{x \in \mathbb{F} : \varphi(x) > 0\}\right) < \infty$.

■

Teorema 3. *Sea* $p \in (0, \infty)$*. El conjunto de las funciones simples nulas fuera de un conjunto de medida finita es denso en* L^p*.*

Demostración

Sea $f \in L^p$ y $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones no decrecientes de funciones simples no negativas tales que $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f^+(x)$ y $\lim_{n\rightsquigarrow\infty} \psi_n(x) = f^-(x)$ para cualquier $x \in \mathbb{F}$. Sea $A = \{y \in : |f(y)| < \infty\}$. Entonces, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n I_A$ y $\psi_n I_A$ siguen siendo simples.

Para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se tiene $\varphi_n I_A \leq f^+$ y $\psi_n I_A \leq f^-$, así que $\varphi_n I_A \in L^p$ y $\psi_n I_A \in L^p$. Por lo tanto, $\varphi_n I_A$ y $\psi_n I_A$ son nulas fuera de un conjunto de medida finita.

Además, como $\mu(A^c) = 0$, $\lim_{n\to\infty} \varphi_n I_A = f^+$ y $\lim_{n\to\infty} \psi_n I_A = f^-$ casi en todas partes.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $s_n = \varphi_n I_A - \psi_n I_A$. Entonces:

$\lim_{n\to\infty} s_n = f^+ - f^- = f$ casi en todas partes. Así que:

$\lim_{n\to\infty} |f - s_n|^p = 0$ casi en todas partes.

Además:

$$|s_n| = |\varphi_n I_A - \psi_n I_A| \leq \varphi_n + \psi_n = |f|$$

Así que:

$$|f - s_n|^p \leq 2^p \left(|f|^p + |s_n|^p\right) \leq 2^{p+1} |f|^p$$

Por lo tanto, aplicando el teorema de la convergencia dominada, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{F}} |f - s_n|^p \, d\mu = 0$$

Así que la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en L^p.

■